Ìṣedọ́gba yíyàtọ̀ onígbọrọ ìpele èkèjì
(Differential equation)

1 Àlàyá pẹ̀lú ìtúmọ̀ àwọn ọ̀rọ̀

Àwọn ìṣedọ́gba tí ìrísí wọn rí báyìí :

(E) $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + d(t)y(t) = f(t)$

Ni a ń pè ni ìṣedọ́gba yíyàtọ̀ onígbọọrọ yẹpẹrẹ y jẹ́ isẹ́ rere tí a ò mọ̀; a, b, d àti f jẹ́ àwọn iṣẹ́ rere tí a mọ̀. Àwọn iṣẹ́ a, b , d ni a ń pè ni olùlọ́po ÌYÍI* ,tí f sì jẹ́ apá kèjì ìṣedọ́gba

Àlàyé 1.1
Nígbà tí a bá mú ìkókó I ti R (Òùnkà rere) a gbà pé

1. Àwọn isẹ́ a, b, d jẹ́ aláìníhò nínú ìkókó I
2. Fún gbogbo t $a(t) \neq 0$

Pẹ́lú àwọn àlàkalẹ̀ wọ̀nyìí, àbájáde (E) lórí I ni gbogbo iṣẹ́ y ti ọ̀wọ́ K^2 lórí I, (E) dọ́gbà fún gbogbo t ti I.

H ni àwọn kání wájú.

Pẹ̀lú àwọn káni H

Ọ̀rọ̀
- A máa sọ pé ojútùú ìṣedọ́gba (E) jẹ́ ìṣọ̀kan tí iṣẹ́ f bá jẹ́ òdo fún gbogbo t ti I, èyí $f \equiv 0$.
- A yóò sọ pé (E) jẹ́ oní olùlọ́po aláìṣeéyípadà tí àwọn isẹ́ a, b, d bá jẹ́ aláìṣeéyípadà.

2.1 Àwójútùú ìṣedọ́gba ÌYÍI* onígbọọrọ ìpele kéjì

2.1 Bóyá ojútùú wà

Ìdáàbà 2.1, nígbà tí káni H bá jẹ́ òótọ́, a lè sọ wí pé ìṣedọ́gbà (E) ní ojútùú àìlóńkà.

Àlàyé 2.2
a ṣègbòrò káni ìbẹ̀rẹ̀ (KI) dé àwọn káni irúfẹ́ $y'(t_1) = \beta$ nígbà tí $t_1 \in I$. Ìṣòrò Gauchy tó Jẹ́mọ ÌYÍI onígbọọrọ ìpele 2 béèrè fún ìsopọ̀ káni ìpele méjì :

$$
(P)\quad \begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + d(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_1) = \beta. \end{cases}
$$

Ojútùú yìí fi dá wa lójú pé àbájáde ọkan péré ni ìṣòrò yìí ní.

Àbùdá 2.1 :

Nígbà tí àwọn káni H bá jẹ́ òótọ́ , èyí máa túmọ̀ sí pé ìsòrò Gauchy
ní àbájáde ọ̀kan péré nínú I.

Àkíyèsí :

Nígbà tí kò bá sí káni ìpilẹ̀ ÌYÍI Gauchy ní ojútùú àìlóǹkà pẹ̀lú káni méjì, ìpìlẹ̀ ojútùú jẹ́ ọ̀kan péré.

Bíi ti ÌYÍI ìpele 1, àbájáde yìí máa fún wa ni àlàkalẹ̀ ìṣírò ojútùú ìdọ́gba ÌYÍI ìpele èkèjì.

Àbùdá 2.2

Nígbà tí a bá mú ìkókó I ti R àti (E), tí àwọn káni H sì jẹ́ òótọ́, àbájáde gbogbo (E) jẹ́

$$y(t) = y_h(t) + y_0(t)$$

- $y_h(t)$ jẹ́ àbájáde ti ìṣedọ́gbà ìṣọ̀kan tó jẹ́mọ (E) ti a pè ni E_h

$$(E_h)\quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + d(t)y(t) = 0$$

- y_0 jẹ́ àbájáde àkànṣe ti (E).

Ìpele méjì ni a máa lò fún àwójútùú, bíi ti ÌYÍI ìpele 1, a máa lò ìpele méjì fún àbájáde ìṣòrò

1. Ìṣòrò àwọn àbájáde ìṣedọ́gbà ìṣọ̀kan (E_h)
2. Àwárí àbájáde àkànṣe ìṣedọ́gba pátápátá

2.2.2 Àwójútùú ìsedọ́gbà ÌYÍI àkànṣe ìpele 2

Ìsedọ́gbà ÌYÍI àkànse tó rí báyìí ni a fẹ́ mójútó

$$(E_h)\quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + d(t)y(t) = 0$$

Nígbà tí àwọn olùlọ́po kò bá ti jẹ́ aláìseyípadà a ò ní ọ̀rọ̀ kan pàtó fún ojútùú ìṣedọ́gba
ÌYÍI ìpele èkèjì tó sì yàtọ sí ìsedọ́gba ÌYÍI ìpele 1

Àbá 2.2 Nígbà tí I bá jẹ́ ìkókó ti a ṣàlàyé, àwọn a,b, d sì jẹ́ aláìníhò tí $a(t) \neq 0$, àwọn ojútùú àwọn ìṣedọ́gba aláìṣeyípadà (E_h) rí báyìí.

$$y(t) = \lambda\, y_1(t) + \mu y_2(t)$$

Nígbà tí y_1, y_2 jẹ́ ojútùú ti ìlà wọn kò jẹmọ́ ara wọn, èyí tó túmọ̀ sí pé y1(t)/y2(t) kìí ṣe aláìṣeyípadà àwọn òǹkàye λ àti μ jẹ́ alàìṣeyípadà òǹkaye rere. Èyí túmọ̀ sí pé àwọn ojútùú jẹ́ agbègbè àkójọ elètò-ìtọ́kasí olópo méjì.

Nígbà tí a bá tẹ̀lé àbá yìí a yóò rí pé ti a bá mọ̀ ojútùú méjì tí ìlà wọn kò pápọ̀ ti (E_h), èyí túmọ̀ sí pé a lè mọ̀ gbogbo ojútùú.

Ó sì tún rọrùn pé tí a bá mọ̀ ojútùú ọ̀kan ti ìṣedọ́gba ìsọkan ÌYÍI a lè rí èkèjì tó yàtọ sí ti àkọ́kọ́ tí yóò sì wa fún wa ni àǹfààní láti mọ̀ gbogbo èyí tó kù.

Àlàkalẹ̀ ìdíkù àtòtẹ̀lé : ó jẹmọ àlàkalẹ̀ ìyípadà aláìṣeyípadà. Ọ̀nà ni :

Ìpele 1 : Ìfinúwò ojútùú y_1 ti ìṣedọgba (E_h) : Ẹ wó ìrísí ìṣedọ́gba náà kí ẹ sì lò àwọn iṣẹ́ onírúye púpọ̀ wọ̀nyìí.

$$t,\ t^2,\ e^t \text{ (tí } a(t) + b(t) + d(t) = 0,\ y(t) = e^t$$

Ìpele 2: A á ṣe àwárí ojútùú y_2 tí (E_h) pẹ̀lú àlàkalẹ̀ ìyípadà aláìṣeyípadà, èyí tó túmọ̀ sí

$$y_2(t) = K(t)y_1(t)$$

Ìpele kẹ́ta : ojútùú pátápátá ni

$$y(t) = \lambda\, y_1(t) + \mu y_2(t), \text{ où } \lambda,\ \mu \in R.$$

<u>Iṣẹ́ àdáṣe</u>

(a) $t^2y'' + ty' - y = 0$

(b) $ty'' - 2(t-1)y' + (t-2)y = 0 \quad t > 0$

(c)

Irú ÌYÍI onígbọọrọ ìṣọ̀kan ti ìpele kèjì oní olùlọ́po aláìṣeyípadà :

$$(E_c) \qquad ay''(t) + by'(t) + dy(t) = 0.$$

Tí a, b, d R pẹ̀lú $a \neq 0$.

A fẹ́ lò àlàkalẹ̀ ìdíkù àtòtẹ̀lé fi rójútùú ìṣedọ́gba yìí. Ìpele àkọ́kọ́ a yóò béèrè tí ìsedọ́gba ní ojútùú irú $y(t) = e^{rt}$

$$y(t) = e^{rt} \quad y' = re^{rt} \quad y'' = r^2e^{rt}$$

Nígbà tí a bá kó gbogbo èyí sínú (Ec) $(ar^2 + br + d) e^{rt} = 0$

$$\boxed{ar^2 + br + d = 0}$$

Àfìdámọ̀ ìṣedọ́gba (Ec)

Ìyàsọtọ̀ $\Delta = b2 - 4a$ ìsedọ́gba r_1 àti r_2 ni àwọn orísun (oǹkaye rere tàbí tóṣòro tó yàtọ̀ tàbí tó dàpọ̀).

Nígbà tí dẹ́tà $\Delta > 0$ ìṣedọ́gba yìí máa ní orisùn méjì $r_1 \neq r_2$ oǹkaye rere tí

$$y_1(t)=e^{r1t} \quad \text{àti} \quad y2 = e^{r2t}$$

Wọ́n jẹ́ ojútùú tó yàtọ̀ tì wọ́n ò sì lè pàde ara wọn.

$$\boxed{y(t) = K_1 e^{r1t} + K_2 e^{r2t} \text{ pẹ̀lú } K1, K2 \text{ aláìṣeyípadà aláìnídìí}}$$

Nígbà tí $\Delta < 0$, ìṣedọ́gba wa máa ní ojútùú méjì ti wọ́n jẹ́ oǹkaye tóṣòrò àsopọ̀.

$$r = \alpha + i\beta \quad \text{àti} \quad \bar{r} = \alpha - i\beta$$

$$\boxed{y(t) = K_1 e^{rt} + K_2 e^{\bar{r}t} \text{ pẹ̀lú } K_1, K_2 \in C \text{ jẹ́ oǹkaye tóṣòrò}}$$

Nígbà tí a bá fẹ́ jẹ́ kí wọn jẹ́ oǹkaye rere

$$\boxed{y(t) = e^{rt} (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \; A, B \in R}$$

Nígbà tí $\Delta = 0$ ìṣedọ́gba máa ni orísun ẹyọ kan $r=-b/2a$ (orísun ìlọ́poméjì).
A máa ní $y_1(t) = e^{rt}$ orísun ÌYÍI ìṣòkan (E_c) pẹ̀lú àlàkalẹ̀. Pẹ̀lú àlàkalẹ̀ ìdíku àtòtẹ̀lé a á rí ojútùú kèjì.
$y_2(t)=te^{rt}$ tí wọ́n sì yàtọ̀ sí ara wọn lọ́nà gbọọrọ

$$\boxed{y(t) = e^{rt} (A + B(t)) \; A, B \text{ aláìṣeyípadà aláìnídìí}}$$

Iṣẹ́ àdáṣe

(a) $2y'' + 3y + y = 0$ (d) $y'' + 2y' + y = 0$,
(b) $5y'' + 2y' + y = 0$

2.2.3 Àwárí ojújùú àkànṣe

A á ròronuwòye sórí ÌYÍI pátápátá.

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + d(t)y(t) = f(t)$$

Èyí túmọ̀ sí pé a ń wa ojútùú àkànṣe. Nǹkan tí a máa ṣe ni kí a wá tí a bá lè rí ojútùú tó fojú hàn, bí kò bá jẹ́ bẹ́ẹ̀ a yóò lò àwọn àlàkalẹ̀ wọ̀nyìí:

- ÌYÍI oníolùlọ̀po aláìṣeyípadà
  Nígbà tí apá kèjì bá rí bíi
  $$f(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$
  Àwárí ojútùú àkànṣe tó rí bíi
  $$y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$
- Nígbà tí apá kèjì bá rí bíi
  $f(t) = e^{\lambda t} + P_n(t)$ pẹ̀lú P_n onírúiyepúpọ̀ oní ìyí n
  - Àkọ́kọ̀ 1^o Nígbà tí
    $a\lambda^2 + b\lambda + d \neq 0$ èyí tó túmọ̀ sí pé $\lambda \neq r_1$ àti $\lambda \neq r_1$
    a máa ṣàwárí ojútùú àkànṣe ojútùú àkànṣe tí ìrí sí wà báyìí
    $y_0(t) = e^{\lambda t}Q_n(t)$ tí Q_n onírúiyepúpọ̀ oní ìyí n
  - Èkèjì 2^o Nígbà tí
    $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ pẹ̀lú $2a\lambda + b \neq 0$ èyí tó túmọ̀ sí $\lambda=r_1$ $\lambda=r_2$
    avec $r1 \neq r2$

    A máa ṣàwárí ojútùú ìrí sí máa wà báyìí :

    $y_0(t) = e^{\lambda t}\, tQ_n(t)$ tí Q_n onírúiyepúpọ̀ oní ìyí n

    Ẹ̀kẹta 3^o Nígbà tí $\lambda=r_1=r_2$
    A máa ṣàwárí tí ìrísí wà báyìí :
    $y_0(t) = e^{\lambda t}\, t^2Q_n(t)$ tí Q_n onírúiyepúpọ̀ oní ìyí n

Gbogbo : Àlàkalẹ̀ ìyípadà aláìṣeyípadà
Ìlànà pàtàkì kan níí :
A ti rí ojútùú ìṣèdọ́gba ìṣọ̀kan

$y_h(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ a máa ṣàwárí ojútùú

$y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$

A máa ṣàwàrí àwọn iṣẹ́ tó ṣàẹrídájú ìlànà ètò yìí

Ìlànà $\begin{cases} y_1(t)A(t) + y_2(t)B(t) = 0 \\ y_1'(t)A'(t) + y_2'(t)B'(t) = f(t)/a(t) \end{cases}$

Ìlànà ètò ni ti ìlànà onígbọọrọ (A(t) , B(t)) tí
Àwòmọ́ :

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Tí a ń pè ni Wronskien ti y_1 àti y_2 ṣé ètò (I) ní àwọn ojútùú ?
Bẹ́ẹ̀ ni nítórí w(t) jẹ́ òdo

$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = y_1(t)^2(y_2/y_1)(x) \neq 0$ Nígbà tí y1 àti y2 jẹ́ alápọ̀gbà

ÌYÍI* (Ìṣedọ́gba yíyàtọ̀ onígbọrọ ìpele èkèjì)